«Математика для каждого» и понятие «отношение»

Костин С. В.[1]

Россия, г. Москва, МГТУ МИРЭА

Данная статья посвящена очень важному понятию математики, а именно, понятию отношения. Напомним, что отношение ρ из множества A во множество B — это упорядоченная тройка $\langle A, B, S \rangle$ такая, что множество S является подмножеством декартова произведения $A \times B$ множеств A и B (*см., например,* [1]).

Частным случаем понятия отношения является понятие отображения, а именно, отображение f — это такое отношение $f = \langle A, B, S \rangle$, что для любого элемента $x \in A$ существует и притом ровно один элемент $y \in B$ такой, что $x \rho y$. Этот элемент y называется значением отображения f на элементе $x \in A$ и обозначается $f(x)$.

Надо ли изучать в школе понятие «отношение»?

Дать четкий и однозначный ответ на этот вопрос не так-то просто.

Еще 35 лет назад Г. Фройденталь писал: «Отношения, в противоположность функциям, не играют роли в приложениях. …Авторы учебников обращаются к родственным отношениям и основательно эксплуатируют их… Конечно, это не является серьезной математикой или серьезным приложением математики; это не имеет ничего общего и с математическим моделированием; это лишь подтасовка, фальсификация математических структур» [2, С. 30].

А вот что пишет Г. В. Дорофеев в своей давно ставшей классической статье [3] по поводу возможности и целесообразности определения функции (отображения) как частного случая отношения (соответствия) (С. 169): «Принципиальный недостаток теоретико-множественной концепции функции состоит, на наш взгляд, в том, что теоретико-множественное определение полностью лишает функцию ее основной черты — динамичности… Статичность определения функции как множества скорее мешает, чем способствует формированию у учащихся правильного представления о функции — того представления, которое имеет исследователь-теоретик и особенно практик».

Мы видим определенную близость позиций Г. Фройденталя и Г. В. Дорофеева, которые ориентируют математику прежде всего на естественнонаучные приложения, на описание непрерывных математических моделей.

Признавая право этой точки зрения на существование, надо в то же время четко отдавать себе отчет в том, что «за последние десятилетия математические методы стали проникать в такие науки, как лингвистика, социология, психология, история, биология, где раньше они не находили применения. При этом наряду с количественными исследованиями математические методы стали применять в качественных, структурных исследованиях. …Теория бинарных отношений дает удобный математический аппарат для таких исследований» [4, С. 182].

1 kostinsv77@mail.ru, +7 (495) 733-60-69

В качестве примера укажем на книгу [5], посвященную математическим методам современной психологии, в которой бинарным отношениям и их различным типам (отношениям эквивалентности, толерантности, порядка, квазипорядка и т.д.) посвящена целая глава объемом более ста страниц, а также на книгу [6], значительная часть которой посвящена экономическим приложениям теории бинарных отношений.

Не случайно в учебнике [7], предназначенном для студентов гуманитарных специальностей, В.Н. Салий пишет (С. 230): «Язык теории отношений является одним из самых разработанных способов описания дискретных систем. Само понятие отношения между двумя объектами носит столь универсальный характер, что невозможно представить себе область человеческой деятельности, где оно не проявлялось бы в виде тех или иных конкретных связей».

Можно ли с учетом сказанного считать понятие «отношение» настолько важным, чтобы быть включенным в общеобразовательный курс математики, то есть в курс «математики для каждого»?

Мы проанализировали ряд современных зарубежных учебников математики, предназначенных для учащихся колледжей. В большинстве из этих учебников используется следующий подход: сначала вводится понятие отношения (*relation*) как произвольного множества упорядоченных пар, а затем как частный случай этого понятия вводится понятие функции (*function*) или, что то же самое, понятие отображения (*mapping*). При этом детального изучения типов бинарных отношений на множестве (рефлексивные, симметрические, транзитивные отношения и т.д.) в учебниках для колледжей не производится. Этот материал изучается уже в университетских курсах дискретной математики.

По нашему мнению, бинарные отношения на множестве и их типы вполне заслуживают изучения как минимум в математических школах и классах. Не случайно, в учебнике [8], возможно, не полностью осознанно для авторов, на стр. 17 проскользнуло словосочетание «отношение между элементами некоторого множества». При этом само определение понятия «отношение на множестве» в учебнике дано не было.

Так может быть, не надо считать школьников недостаточно подготовленными и постараться объяснить им, что такое отношение на множестве, а что такое операция на множестве? Объяснить, что $\subset$ — это отношение между множествами, а $\cup$ — это операция над множествами; что $<$ — это отношение между числами, а $+$ — это операция над числами и т.д. Может быть, эти сведения окажутся для школьников более полезными (поскольку помогут им лучше овладеть математическим языком), чем, например, формула для объема усеченного конуса (которую ни один нормальный инженер все равно не помнит, но знает, где ее можно найти)?

Вопрос остается открытым. Мы будем очень рады, если наша статья заинтересовала читателей и будем очень благодарны за любые комментарии или замечания по затронутым нами вопросам.

Литература

1. *Костин, С. В.* Изучение понятия «отношение» в вузовском курсе математики // Бюллетень Московского городского педагогического университета. Т. 3. — Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2012. — С. 381–391.
2. *Фройденталь, Г.* Математика как педагогическая задача: книга для учителя / Под ред. Н. Я. Виленкина. Часть 2. — М.: Просвещение, 1983.
3. *Дорофеев, Г. В.* Математика для каждого. — М.: Аякс, 1999. — С. 145–177.
4. Избранные вопросы математики. 9 класс. Факультативный курс. — М.: Просвещение, 1979.
5. *Логвиненко, А. Д.* Измерения в психологии. — М.: Изд-во МГУ, 1993.
6. *Алескеров, Ф. Т., Хабина, Э. Л., Шварц, Д. А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, 2012.
7. *Салий, В. Н.* Математические основы гуманитарных знаний. — М.: Высш. шк., 2009.
8. *Дорофеев, Г. В., Кузнецова Л. В., Седова Е. А.* Алгебра и начала анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Дрофа, 2003.