Формулирование критерия как результат работы с определением понятия

Калинин С. И.[1]

Россия, г. Киров, ВятГГУ

В докладе автор обращается к осмыслению хорошо известного в курсе математического анализа для студентов-математиков определения понятия выпуклой функции в терминах неравенства Иенсена. На примере данного понятия показывается, как организация соответствующей работы с определением понятия может приводить к формулированию новых утверждений, в том числе нового критерия.

Напомним определение выпуклой на промежутке функции. Пусть l —произвольный промежуток числовой прямой Ox и $f : l \to R$ — непрерывная функция.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется выпуклой (строго выпуклой, выпуклой вниз, строго выпуклой вниз) на промежутке l, если для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого числа λ, $\lambda \in (0;1)$, выполняется неравенство

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)<\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\,. \qquad (1)$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется вогнутой (строго вогнутой, выпуклой вверх, строго выпуклой вверх) на промежутке l, если для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого λ, $\lambda \in (0;\,1)$, выполняется неравенство

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)>\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\,. \qquad (2)$$

К обсуждению представляется следующий критерий выпуклости функции, который возникает в результате работы с определением 1, в частности, — в результате осмысления его геометрической интерпретации.

Теорема А. *Функция f является выпуклой тогда и только тогда, когда для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, любого числа λ, $\lambda \in (0;\,1)$, и любых точек $u, v \in [a;b]$, $a<u\le v<b$, удовлетворяющих условию $\lambda u+(1-\lambda)v=\lambda a+(1-\lambda)b$, будет выполняться неравенство*

$$\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)<\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\,. \qquad (3)$$

В условиях сформулированной теоремы А неравенство (3) при ограничении $a<u<v<b$ порождает двойное неравенство

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)<\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)<\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\,, \qquad (4)$$

которое уточняет неравенство Иенсена (1).

1 kalinin_gu@mail.ru, +7 (909) 144-42-21

В неравенстве (4) величина $\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$ тем меньше отличается от величины $f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)$, чем значение u ближе к значению $\lambda a+(1-\lambda)b$. Наоборот, сумма $\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$ тем меньше отличается от суммы $\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$, чем значение u ближе к a (v ближе к b).

Ясно то, что по аналогии может быть сформулирован критерий вогнутости функции на промежутке, а также приведено соответствующее уточнение неравенства Иенсена (2) для вогнутой функции. Сформулируем упоминаемые результаты.

Теорема Б. *Непрерывная на промежутке l числовой прямой Ох функция $f(x)$ является вогнутой на данном промежутке тогда и только тогда, когда для любого отрезка $\left[a;b\right]$, принадлежащего l, любого числа λ, $\lambda\in\left(0;1\right)$, и любых точек $u,v\in\left[a;b\right]$, $a<u\le v<b$, удовлетворяющих условию $\lambda u+(1-\lambda)v=\lambda a+(1-\lambda)b$, будет выполняться неравенство*

$$\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)>\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \qquad (5)$$

В условиях теоремы Б неравенство (5) при ограничении $a<u<v<b$ порождает двойное неравенство

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)>\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)>\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),$$

уточняющее неравенства Иенсена (2) для вогнутой функции.

Анонсируемый материал автором в последнее время включался в содержание обучения студентов (будущих учителей математики), а также магистрантов направления подготовки «Математика и компьютерные науки».