К вопросу о проектно-исследовательской деятельности по математике в профильной школе

Пчелинцев С.В.[1,*]

[1]Россия, г. Москва, ФГНУ ИСМО РАО

Школьные образовательные стандарты второго поколения привнесли в образовательный процесс новые компоненты. Одним из наиболее существенных нововведений является то, что теперь все школьники обязаны вести проектную и исследовательскую деятельность. Что же следует считать математическим исследованием или проектом? Стандарты на этот вопрос ответа не дают, и как следствие, благое по своей сути начинание может превратиться в тонны распечаток из Интернета, за которые дети получают «галочки». Рассмотрим в общих чертах вопрос о проектно-исследовательской деятельности в профильной школе на примере курса алгебры и начал анализа.

Очевидно, что новых – в прямом смысле этого слова – результатов по математике на школьной скамье практически никому получить не удастся. Однако потенциал математических наук настолько велик, что какой бы профиль школьник не выбрал, всегда имеется возможность найти применение математики к избранному направлению. Это может быть как углубление в специальные отделы математики, «обслуживающие» данную область знаний, включая саму математику, так и некоторая «расчетная» или «доказательная» часть учебной работы. В первом случае целесообразно говорить об учебном математическом исследовании, в результате которого школьник получит «новые» результаты – самостоятельно или под руководством учителя (а для ряда тем – профессионального математика). Во втором случае имеет смысл говорить о коллективной деятельности и междисциплинарном характере самой работы, причем вместо «новых» фактов, теорий или алгоритмов здесь более уместно ставить целью приложение имеющихся знаний, а акцент следует делать на опыте «разделения труда».

Следует отметить, что школьный учитель, имеющий, как правило, специальность «математика», в рамках полученного в педвузе образования может руководить несложными исследовательскими работами по «чистой» математике». Более сложная тематика также может быть выбрана школьниками, но для этого необходима помощь профессионалов. То же относится и к проектам – их выполнение может принести пользу лишь в том случае, когда их руководитель (соруководитель) «видит далеко вперед» и школьник «из первых уст» может узнать о реальной ценности математических теорий.

Таким образом, школьному учителю – в области своей компетентности – следует придерживаться следующей тематики исследовательской деятельности. (Заметим, что в ряде случаев выбранную тему также можно «разрабатывать» в виде коллективного проекта).

Многочлены

*pchelinzev@mail.ru

1. Бином Ньютона и формула Тейлора. Различные способы доказательства бинома Ньютона (комбинаторное, индуктивное, с использованием схемы Горнера). Треугольник Паскаля. Использование схемы Горнера (расширенная схема Горнера) для получения формулы Тейлора. Решение задач с использованием бинома Ньютона и формулы Тейлора.
2. Возвратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к квадратным и кубическим с помощью разнообразных замен переменных. Подстановки типа и возвратные уравнения. Решение задач.
3. Дополнительные теоремы о целых и рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами и их применение к нахождению целых и рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами. Доказательство иррациональности некоторых чисел.
4. Формулы Виета для многочленов произвольной степени. Элементарные симметрические многочлены. Связь между корнями многочлена и его коэффициентами. Применение формул Виета для вычисления значений симметрических многочленов от корней многочлена.
5. Симметрические многочлены. Лексикографический порядок. Построение многочлена от элементарных симметрических, имеющего данный высший член. Основная теорема о симметрических многочленах. Применения основной теоремы к алгебраическим числам.
6. Факторизация. Сравнения по данному модулю (в качестве модуля может быть взято либо целое число, либо многочлен). Свойства сравнений. Классы вычетов (элементов по заданному модулю) и их свойства. Построение полей комплексных чисел и конечных полей с использованием классов вычетов.

Комплексные числа

1. Алгебраические числа. Понятия алгебраического и трансцендентного чисел. Минимальный многочлен алгебраического числа и его свойства. Степень алгебраического числа. Поле алгебраических чисел.
2. Комплексные корни из единицы. Алгебраическая и геометрическая характеристики корней из единицы. Первообразные корни. Функция Эйлера и ее свойства.
3. Формулы Кардано. Кубические корни из единицы. Метод Кардано решения кубического уравнения. Решение уравнений степени 3 и 4.
4. Комплексные числа и многочлены. Основная теорема алгебры (без доказательства). Делимость многочленов, основанная на наличии комплексных корней. Построение различных (изоморфных) моделей поля комплексных чисел.
5. Комплексные числа и тригонометрия. Доказательство тригонометрических тождеств и нахождение значений тригонометрических выражений с использованием формулы Эйлера.
6. Расширения полей. Присоединение корня к числовому полю. Теорема о строении простого алгебраического расширения. Понятие о башне расширений и степени расширения. Конечные поля.

Элементарные функции

1. Кубические многочлены. Исследование кубического многочлена без использования производной и с помощью производной. График кубического многочлена. Нахождение обратной функции.
2. Графики функций, содержащих модули. Построение графиков функций с мо-

дулями. Применение графиков к решению соответствующих уравнений и неравенств (как замена метода интервалов).
3. Уравнения и неравенства с модулями и параметрами. Понятие о плоском методе интервалов и его применение к решению уравнений и неравенств с модулями и параметрами.
4. Кусочно-линейные функции. Представление кусочно-линейных функций и виде аналитических выражений с модулями. Применение кусочно-линейных функций при решении задач, содержащих много модулей.
5. Тригонометрические уравнения. Различные типы тригонометрических уравнений и методы их решения.
6. Обратные тригонометрические функции. Основные соотношения между аркусами. Решение уравнений, содержащих аркусы.

Производная и ее применение

1. Элементы теории пределов. Понятие предела числовой последовательности. Арифметические свойства пределов. Аксиома непрерывности. Точная верхняя грань числового множества. Теоремы Кантора и Вейерштрасса. Число Эйлера (основание натуральных логарифмов).
2. Выпуклые функции. Понятие выпуклой функции; достаточное условие выпуклости. Применение выпуклых функций для сравнения основных средних (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратичное).
3. Средние величины. Различные способы доказательства соотношений между средними величинами. Использование средних величин при решении задач.
4. Нестандартное применение производной. Решение задач, в которых применение производной носит эвристический, а не алгоритмический характер.
5. Задачи на максимум и минимум. Алгебраические, тригонометрические, геометрические и аналитические задачи на экстремум.
6. Формула Тейлора. Понятие о разложении функции в ряд Тейлора и применение разложений при вычислении приближенных значений аналитических выражений.

Интеграл и его приложения

1. Полярные координаты. Длина окружности и площадь круга. Использование полярных координат при нахождении длин кривых (длина дуги) и площадей областей, ограниченных кривыми (площадь сектора). Решение задач.
2. Объем тела вращения. Нахождение объемов различных тел вращения (цилиндр, конус, шар).
3. Признаки сходимости числовых рядов. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Понятие о числовом ряде. Расходимость гармонического ряда. Признак Даламбера и интегральный признак. Сравнение числовых рядов.
4. Замена переменной при вычислении интегралов. Применение различных подстановок при вычислении интегралов.
5. Интегрирование по частям. Вычисление различных интегралов указанным методом.
6. Несобственные интегралы. Понятие о несобственном интеграле. Вычисление несобственных интегралов. Нахождение площадей неограниченных областей.

Вероятность и статистика

1. Перестановки, сочетания и размещения с повторениями. Основные формулы. Решение комбинаторных задач как с применением указанных понятий, так и без их применения. Основной мотив – всегда можно обойтись соответствующими понятиями без повторений.
2. Геометрические вероятности. Решение задач на нахождение геометрических вероятностей.
3. Принцип включения и исключения. Доказательство принципа и решение задач с его использованием.
4. Производящие функции. Понятие формального степенного ряда, действия над ними. Применение производящих функций к решению комбинаторных задач и теоретико-вероятностных задач.
5. Средние величины, моменты. Понятия математического ожидания, дисперсии, моментов порядка 3 и 4. Решение задач на нахождение средних.
6. Непрерывные распределения. Простейшие непрерывные распределения (равномерное, показательное, нормальное) и нахождение их числовых характеристик (математичекое ожидание, дисперсия).