# О теореме Ролля в редакции Фраклина и ее обобщении

Калинин С.И.[1,*]

[1] *Россия, г. Киров; ВятГГУ*

В книге Ф. Франклина [1], предназначенной для читателей, уже знакомых с элементами дифференциального и интегрального исчисления функций, известная теорема Ролля о среднем значении приводится в следующей редакции.

**Теорема Ролля** [1, с. 124]. *Если функция $f(x)$ имеет производную, беконечную или конечную во всех точкх открытого интервала $a < x < b$, и если $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = 0$, то в некоторой точке $\xi$ этого интервала $(a < x < b)$ производная ее равна нулю: $f'(x) > 0$*

Приведенная теорема, сформулированная в терминах и обозначениях автора цитируемой книги, дополнительно предполагает, что функция $f(x)$ «по определению должна быть непрерывной функцией» [1, с. 110].

Отметим также, что Ф. Франклин, формулируя теорему Ролля, использует следующую терминологию [1, с. 110]: «Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x$ и при этом значении $x$ предел $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ равен $+\infty$, то мы говорим, что функция $f(x)$ имеет производную, равную $+\infty$ в этой точке. Аналогично, если этот предел равен $-\infty$, то мы полагаем $f'(x) = -\infty$ в данной точке $x$ . Если мы захотим включить в рассмотрение эти особые случаи, мы будем употреблять выражение: $f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную…».

Целью доклада является формулирование и анонсирование доказательства утверждения Ролля в более общих предположениях относительно функции $f$. Показывается, что справедлива

**Теорема А**. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a; b)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ числовой прямой и в каждой точке этого интервала обладает либо конечной, либо бесконечной (равной $+\infty$ или $-\infty$) производной. Пусть, далее, существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, равные одному и тому же значению $C, C \in \mathbf{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Тогда найдется хотя бы одна точка $\xi$, $\xi \in (a; b)$, такая что $f'(\xi) > 0$*

Очевидно, теорема А включает в себя и воспроизведенное утверждение Ф. Франклина, и классическое утверждение о средней точке, именуемое в современных учебниках по математическому анализу теоремой Ролля (см., напр., [2, с. 225–226]). Последнее, как известно, лежит в основе построения дифференциального исчисления функций, обладающих конечными производными. Теорема А открывает прямой путь к построению дифференциального исчисления функций, обладающих не только конечной производной, но и, возможно, бесконечной.

В докладе уделяется внимание обоснованию существенности каждого из условий, в которых формулируется теорема А.

Представляемый для обсуждения материал характеризует деятельностную со-

*kalinin_gu@mail.ru, +7 (909) 144-42-21

ставляющую содержания обучения студентов и продвинутых школьников основам математического анализа.

---

[1] Франклин Ф. Математический анализ. Ч. I. – М.: ИЛ, 1950. – 290 с.
[2] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 607 с.