Задачи по планиметрии в стереометрической среде как средство развития пространственного мышления учащихся в основной школе

Рабинович Б.В.[1], Туяков Е.А.[2]

[1]Казахстан, г.Петропавловск, СКГУ им. М.Козыбаева
[2]Казахстан, г.Астана, НАО им. Ы.Алтынсарина

Пространственное мышление – специфический вид мыслительной деятельности, которая необходима при решении задач, требующих ориентации в пространстве (как видимом, так и воображаемом). Главным содержанием этого вида мышления является оперирование пространственными образами в процессе решения задач (геометрических, графических, конструктивно-технических, технологических и др.) на основе создания этих образов путем восприятия (или по представлению) пространственных свойств и отношений объектов [1].

В настоящее время в большинстве учебных курсов геометрии систематическое изучение стереометрии происходит в 10 – 11 классах. В начальной школе и затем в 5-м и 6-м классах есть пропедевтический курс по изучению пространственных тел, таких как куб, прямоугольный параллелепипед, пирамида, шар и конус, что создаёт предпосылки для их дальнейшего изучения. Однако с 7-го класса начинается систематическое изучение планиметрии и лишь в конце 9-го класса снова появляются пространственные объекты. При таком построении курса геометрии нарушается преемственность обучения. Другой недостаток состоит в том, что школьников окружают пространственные объекты, форму, размеры и свойства которых как раз и должна изучать геометрия, а не плоские фигуры. Происходит разрыв, приостановка развития пространственного воображения [2].

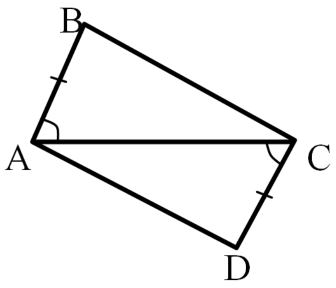
Изучая проблемы формирования пространственных представлений у школьников, В.А. Далингер говорит о том, что пространственные представления школьников являются первичными, а плоские фигуры являются частями пространственных фигур. Поэтому, при изучении планиметрии, следует искать и устанавливать связи между плоскими и пространственными фигурами, а так же с предметами окружающей действительности [3].

Выделяют два подхода к осуществлению изучения элементов стереометрии в основной школе:

- непосредственное включение элементов стереометрии в курс планиметрии;
- косвенное изучение стереометрических объектов через включение в систему упражнений действующих учебных пособий стереометрического материала [4].

Первый подход называют фузионистским, а второй – «частично-фузионистским». Именно второй подход принят в концепции геометрической составляющей 12-летнего образования в Республике Казахстан [5]. Реализовать на практике эту концепцию и решить проблему ликвидации разрыва в процессе формировании пространственного воображения помогло следующее соображение. Дело в том, что многие задачи планиметрии, такие как задачи на равенство и подобие фигур, на площади, многие метрические задачи, задачи на векторы могут быть поставлены и сформулированы на пространственных телах. Методический замысел состоит в том, что рассматривать такие задачи и примеры нужно не отдельно, а вместо соответствующих чисто планиметрических задач и примеров. Поэтому больших дополнительных затрат времени не потребуется, как не потребуется и принципиальная перестройка существующего курса геометрии ([6]). Поясним сказанное выше на примере изучения признаков равенства треугольников.

1. Формулируем и доказываем первый признак равенства треугольников.
2. После доказательства теоремы рассматриваем пример решения задачи на применение этого признака.
   Задача 1. Доказать равенство треугольников, изображенных на рисунке 1. Какие стороны и углы этих треугольников будут соответственно равными?
3. После обсуждения решения задачи 1 предложить решить самостоятельно задачу 2, которую тоже следует сформулировать по готовому чертежу.
   Задача 2. В треугольной пирамиде $DABC$ (рисунок 2) $\angle ADB = \angle DBC, AD = BC$. Какие ещё рёбра и углы граней пирамиды будут равными?



Доказать: ΔABC = ΔCDA

Рис. 1

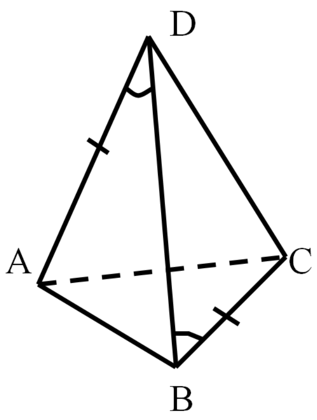
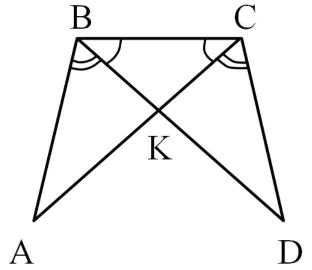


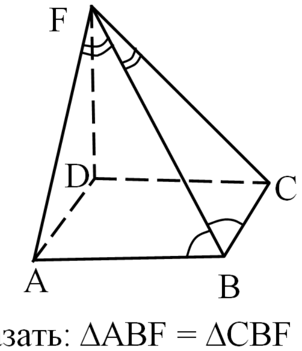
Рис. 2

4. Формулируем и доказываем второй признак равенства треугольников. Для лучшего усвоения и закрепления изученной теоремы полезно устно решить задачи по готовым чертежам (рисунки 3 и 4).



Доказать: ΔABC = ΔDCB
ΔABK = ΔDCK

Рис. 3



Доказать: ΔABF = ΔCBF

Рис. 4

5. Домашнее задание тоже следует дать комбинированное, состоящие из «плоских» и «пространственных» задач.
   Задача 1. В треугольниках PRT и PQS $PR = PQ$ и $PT = PS$ (рисунок 5). Докажите, что а) $\triangle PRT = \triangle PQS$; б) $\triangle RSQ = \triangle QTR$.

Задача 2. В треугольной пирамиде DABC (рисунок 6) $\angle DBC = \angle BDA$ и $\angle ABD = \angle BDC$. Докажите, что $AD = BC$ и $AB = DC$. При проведении данного урока задачи стереометрического содержания не только не вызвали затруднений, но решались с интересом, а при выполнении домашнего задания с задачей 2 справились больше учащихся, чем с задачей 1б.

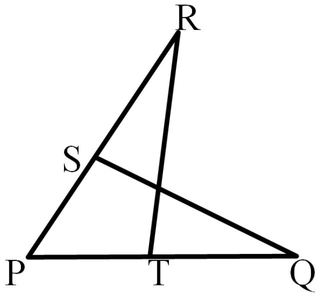


Рис. 5

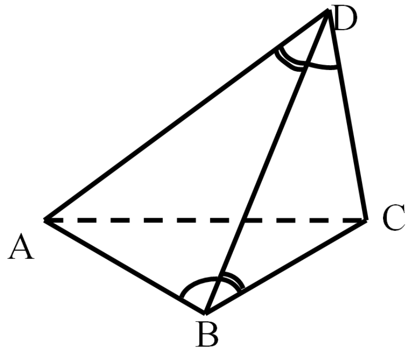


Рис. 6

Рассмотрим пример применения задач планиметрии в стереометрической среде в одной из важнейших тем курса геометрии 8-9 классов – «Векторы». Введение понятие вектора не требует такого ограничения как расположение направленных отрезков в одной плоскости. Равенство направленных отрезков определяется равенством их длин и совпадением направлений. Равные между собой направленные отрезки являются представителем одного и того же вектора. Здесь потребуется лишь транзитивность отношения параллельности в пространстве, о которой следует дать понятие учащимся еще в 7-м классе.

Разберем пример использования таких задач при закреплении темы «Сложение и вычитание векторов».

Задача 1. Дан параллелограмм $ABCD$, O – точка пересечения диагоналей, а E и F – соответственно середины параллельных сторон BC и AD. Построить на чертеже следующие векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$; в) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CD}$.

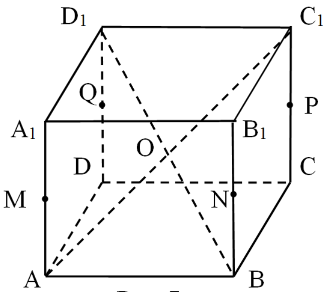


Рис. 7

Задача 2. Дан параллелепипед $D_{111}D_1$ (рис. 7), где – точка пересечения диагоналей параллелепипеда, а точки M, N, P, Q – середины соответственных сторон $_1$, $_1$, $_1$, DD_1. Указать векторы равные соответственно следующим векторам: а) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{MO}$; в) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{NC}$; г) $\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{B_1O} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$.

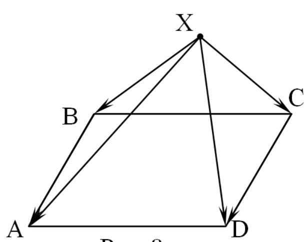


Рис. 8

Задача 3. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 8), X – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$. Верно ли данное утверждение для любой точки X пространства?

Задача 3 требует знания алгебраических свойств сложения векторов. Ее решение сводится к доказательству равенства $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XC}$.

В качестве домашнего задания следует предложить как обычную планиметрическую задачу, так и задачу в стереометрической среде.

Используя разработанный комплекс задач [7] и указанную методику внедрения стереометрического материала в курс планиметрии, мы не только развиваем пространственное мышление учащихся, но и усиливаем мотивацию учения.

Данный подход реализован в пробных учебниках геометрии [8], [9] и успешно (по отзывам учителей) внедряется более чем в 100 школах Казахстана под руководством профессора Абылкасымовой А.Е.

---

[1] Гусев В.А. Методика обучения геометрии /В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 368 с.

[2] Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.

[3] Далингер В.А. Методика формирования пространственных представлений у учащихся при обучении геометрии: учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОГПИ, 1992. – 96 с.

[4] Федосеева З.Р. Формирование пространственных представлений учащихся посредством пропедевтики стереометрических знаний в процессе обучения планиметрии: дисс. канд. пед. наук. – М., 1998. – 164 с.

[5] Содержание образования основного звена 12-летней школы (на русском и казахском языках) /Под редакцией А.Е.Абылкасымовой. – Астана, 2005. – 224 с.

[6] Рабинович Б.В. Новый подход к школьному математическому образованию (Математика в 5-9-х классах) //Сборник трудов международной научно-практической конференции «I Сибирские методические чтения». – Омск, 1995. – С.5-9.

[7] Рабинович Б.В. Сборник задач планиметрии в стереометрической среде. – Петропавловск: Издательство СКГУ, 2011. – 70с.

[8] Рабинович Б.В., Хабарова Г.Г. Геометрия: Пробный учебник для 8 классов 12-летних школ. – Алматы: «Мектеп», 2010. – 247с.

[9] Рабинович Б.В., Тулебаева А.К., Туяков Е.А. Геометрия: Пробный учебник для 9 классов 12-летних школ. – Алматы: «Мектеп», 2011. – 193с.