Несколько замечаний о методе интервалов

Поликарпов С.В.[1,*]

[1]*Россия, г. Владивосток, ДВФУ*

Хорошо известно [1, 2], что неравенство вида

$$(1)(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_n)^{k_n}>0,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – различные действительные числа, а k_1, k_2,…,k_n – произвольные натуральные числа, наиболее просто решается методом интервалов. Суть метода интервалов заключается в следующем:

1. Отметить на числовой оси числа $x_1, \dots, x_n$, считая, что указанные значения упорядочены по возрастанию индексов.
2. На каждом интервале (x_i, x_{i+1}) определить знак левой части неравенства (1) и пометить этот интервал его знаком.
3. Записать ответ в виде объединения интервалов, помеченных знаком плюс.

Теоретическая основа этого метода состоит в том, что при любом x, большем наибольшего из чисел $x_1, \dots, x_n$, данное неравенство выполняется, так как все входящие в левую часть множители являются положительными. В дальнейшем, когда x «движется» справа налево, левая часть может изменить знак только при переходе через x_i, где $1 \le i \le n$. Число x_i в таком случае называют нулем кратности k_i. При переходе через нуль четной кратности меняет знак четное число сомножителей $(x-x_i)$, т.е. выражение в левой части знака не меняет. При переходе через нуль нечетной кратности выражение в левой части меняет знак на противоположный.

Следуя [2, с. 122], заметим, что метод интервалов можно применять для решения неравенства более общего вида $f(x)>0$б если функция $f(x)$ непрерывна, т.е. ее графиком является сплошная (без разрывов) линия.

Метод интервалов можно использовать при решении дробно-рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических, а также неравенств с модулями и их систем. Приведем основные алгоритмы решения соответствующих неравенств.

1. Решение дробно-рациональных неравенств

1. Привести неравенство к виду $f(x)>0$ или $f(x)\ge 0$, т.е. перенести все в одну часть.
2. Функцию $f(x)$ записать в виде дроби.
3. Числитель и знаменатель полученной дроби разложить в произведение простых множителей (каждый сомножитель, являющийся квадратным многочленом, разложить по формуле $ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$). Это разложение осуществляется по единственной причине – чтобы легче было определять знак дроби на каждом из открытых интервалов.
4. Отметить на действительной оси нули числителя и знаменателя $x_1, x_2, \dots, x_n$.
5. Определить знак дроби $f(x)$ на каждом из открытых интервалов.

*gorod40@mail.ru

6. Определить, в каких из граничных точек выполняется данное (нестрогое) неравенство (эти точки закрашены), а в каких – нет (эти точки пустые).
   - Нули знаменателя всегда пустые, так как на нуль делить нельзя.
   - Если неравенство строгое, то нули числителя также пустые.
   - Если неравенство нестрогое, то нули числителя, которые не являются нулями знаменателя, закрашены.

Замечание 1. Умножать, делить, сокращать неравенства на выражения, содержащие переменные, без дополнительных пояснений нельзя.

Замечание 2. Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удобно вычислять приближенно с такой точностью, чтобы числа, получающиеся по разным формулам, не оказались представленными одним и тем же числом. Например, $\frac{8}{3} \approx 2.7$ и $\sqrt{7} \approx 2.7$. Числа $\frac{8}{3}$ и $\sqrt{7}$ – различные, поэтому заменять их одним и тем же десятичным числом было бы ошибкой. Следовательно, $\frac{8}{3} \approx 2.67$ и $\sqrt{7} \approx 2.65$.

Замечание 3. Для определения знака дроби $f(x)$ на интервале (x_i, x_{i+1}) достаточно выбрать «пробную» точку t из интервала (x_i, x_{i+1}) и определить знак числа $f(t)$. В качестве пробной точки можно взять любую точку интервала. Однако, выбирая значение t с помощью приближений x_i и x_{i+1}, необходимо проверить, что $t \in (x_i, x_{i+1})$.

Замечание 4. Так как умножение на положительное число знака выражения не меняет, то можно считать лишь отрицательные множители. Если их количество четное, то дробь будет положительной. Если же их нечетное число, то дробь будет отрицательной.

Замечание 5. Выписывая ответ, следует указывать точные значения корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Решение систем дробно-рациональных неравенств

1. В каждом неравенстве переносим все в одну часть.
2. В каждом неравенстве собираем все в одну дробь.
3. Числитель и знаменатель каждого из неравенств разлагаем в произведение простых множителей.
4. Открытые интервалы, на которых выполняются все неравенства системы, идут в ответ (обозначаются знаком плюс).
5. Открытые интервалы, на которых не выполняется хотя бы одно из неравенств системы, в ответ не идут (обозначаются знаком минус).
6. Граничная точка (нули числителей или знаменателей одного из неравенств) закрашена (идет в ответ), если при этом значении x выполняются все неравенства (условия) системы.
7. Граничная точка пустая (в ответ не идет), если при этом значении не выполняется хотя бы одно из неравенств (условий) системы.

3. Метод замены множителей

Метод замены множителей состоит в сведении решения того или иного неравенства повышенной сложности к решению дробно-рационального неравенства или системы таких неравенств более простого вида, равносильных исходному. Идея «рационализации» явным образом высказана Г.В.Дорофеевым в [3]. Эта идея может быть использована при решении неравенств, содержащих радикалы, степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Допустим, что любое неравенство системы имеет вид

$$(2)\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n} \succ 0,$$

где символ $\succ$ обозначает один из знаков: $<, \leq, \geq, >$.

При решении неравенства (2) методом интервалов нас интересует только знак любого множителя в числителе или знаменателе, а не его абсолютная величина. Поэтому, если какой-нибудь из множителей имеет сложный вид, то мы можем заменить его более простым, имеющим те же нули и совпадающим с ним знаками в области определения. Отметим, что замена множителей осуществляется только в неравенствах, приведенных к виду (2). Запись $A \leftrightarrow B$ означает в дальнейшем замену выражения A на B.

3.1. Замены, связанные со степенной функцией.

Поскольку функция $y = t^n$ при $n > 0$ является строго возрастающей на множестве неотрицательных чисел (а при нечетном натуральном n – на всей числовой прямой), то

$$(2.1) t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^n - t_2^n, n > 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$$

$$(2.2) t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1}, k \in \mathbf{N}$$

Так как функция $y = t^2$ строго возрастающая на множестве неотрицательных чисел, а $|m| \geq 0$ и $|m|^2 = m^2$ для любого m, то из (2.1) получаем, что

$$(2.3)|t_1| - |t_2| \leftrightarrow |t_1|^2 - |t_2|^2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2 = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2)$$

$$(2.4) t_1 - |t_2| \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2 = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2),$$

где $t_1 = ax^2 + bx + c$ и $a > 0, D = b^2 - 4ac < 0$.

3.2. Замены, связанные с показательной и логарифмической функциями.

Показательная функция $y = a^t$ строго убывает при $0 < a < 1$ и возрастает при $a > 1$. Тогда легко заметить, что возможна замена

$$(3.1) a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (a-1)(t_1 - t_2)$$

Логарифмическая функция $y = \log_a t$ при $a > 1$ возрастает на интервале $(0; +\infty)$, а при $0 < a < 1$ убывает на этом же интервале; кроме того, она принимает все действительные значения. Отсюда легко вытекает возможность замен:

$$(3.2) \log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a-1}, t_1 > 0, t_2 > 0, a > 0$$

$$(3.3) \log_a b \leftrightarrow \frac{b-1}{a-1}, a > 0, b > 0$$

В работах [3–5] предлагается вместо этой замены использовать другие замены

$$(3.4) \log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow (a-1)(t_1 - t_2), t_1 > 0, t_2 > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$(3.5) \log_a b \leftrightarrow (a-1)(b-1), a > 0, b > 0, a \neq 1.$$

Наличие множителя $(a-1)$ в знаменателе формулы (3.3) учитывает условие $a \neq 1$. Такую замену удобно проводить, если основание логарифма содержит переменную.

Если основание является константой, то замены (3.4) и (3.5) делают получающиеся выражения более простыми.

Замечание. Если в неравенстве один из множителей является константой, то положительный множитель можно заменить на $+1$, а отрицательный на -1.

Отметим, что указанные замены позволяют также решать нетривиальные степенно-показательные неравенства от одной переменной.

[1] С.И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, изд. 4-ое, М.: Советская наука, 1956, 528 с.

[2] Алгебра и начала анализа. Учеб. Для 10–11 кл. сред. шк. под ред. А.Н. Колмогорова,– 2–е изд.– М.: Просвещение, 1991. – 320 с.

[3] Г.В. Дорофеев, Обобщение метода интервалов, Математика в школе, 1969, №3.

[4] И.Ф. Шарыгин, Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989, – 252 с.

[5] В помощь абитуриентам, Приложение к журналу «Квант» №1, 2009, Составители В.И. Голубев, А.А. Егоров, В.А. Тихомирова, А.И. Черноуцан, 208 с.